



METHODE PAR ELEMENTS FINIS

| Introduction aux Eléments Finis |

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Présentation du principe du calcul par la méthode des éléments finis	4
1.2	Unité de modélisation.....	5
1.3	Principaux logiciels de calcul par élément finis	5
2	Démarche générale	6
3	Etape 1 : Pré-traitement / Préparation du modèle (Preprocessing).....	7
3.1	Réalisation de la géométrie	7
3.2	Simplification de la géométrie.....	7
3.2.1	Simplification de géométrie symétrique.....	7
3.2.2	Simplification de géométrie de révolution (axisymétrique)	8
3.2.3	Simplification dimensionnelle géométrique.....	8
3.3	Préparation de la géométrie	9
3.4	Définition des propriétés des matériaux	9
3.4.1	Introduction aux propriétés des matériaux	9
3.4.2	Loi des comportements des matériaux	10
3.5	Définition du type d'éléments utilisés.....	12
3.5.1	Degrés d'interpolation des éléments.....	12
3.5.2	Eléments volumiques – 3D.....	13
3.5.3	Elément surfacique – 2D	14
3.5.4	Elément unidimensionnel – 1D	14
3.5.5	Elément ponctuelle	14
3.6	Réalisation du maillage de la géométrie.....	15
3.6.1	Notion de mappage de surface	15
3.6.2	Vérification de la qualité des éléments.....	15
3.6.3	Ratio de forme / Aspect ratio.....	16
3.6.4	Contrôle des angles.....	17
3.6.5	Contrôle du twist des angles (skew angles).....	17
3.6.6	Ratio du Jacobien (Jacobian).....	18
3.6.7	Autre type de contrôle des éléments.....	18
3.7	Application des conditions aux limites.....	19
3.8	Application des chargements.....	19
4	Etape 2 : Calcul (Solveur)	20
4.1	Paramétrage de l'étude	20
4.1.1	Analyse statique.....	20

4.1.2	Analyse dynamique	20
4.1.3	Analyse modale	21
4.1.4	Analyse en réponse harmonique.....	22
4.1.5	Analyse modale de flambement (Buckling)	22
4.1.6	Optimisation paramétrique	22
4.1.7	Optimisation topologique	22
4.1.8	Etude Thermique	23
4.1.9	Autres types d'analyse.....	23
4.1.10	Non linéarité d'une analyse	24
4.2	Réalisation du calcul	25
5	Etape 3 : post-traitement / Analyse des résultats (Postprocessing)	25
5.1	Extraction des résultats souhaités.....	25
5.2	Analyse des résultats du modèle.....	25
5.2.1	Notion de contrainte	25
5.2.2	Vérification du modèle – Equilibre des Forces	26
5.2.3	Notion de singularité	26
5.2.4	Contrôle de la déviance des nœuds.....	27
5.2.5	Etude de convergence du maillage.....	27
5.3	Exploitation des résultats.....	29
5.3.1	Rapport d'une étude par éléments finis	29

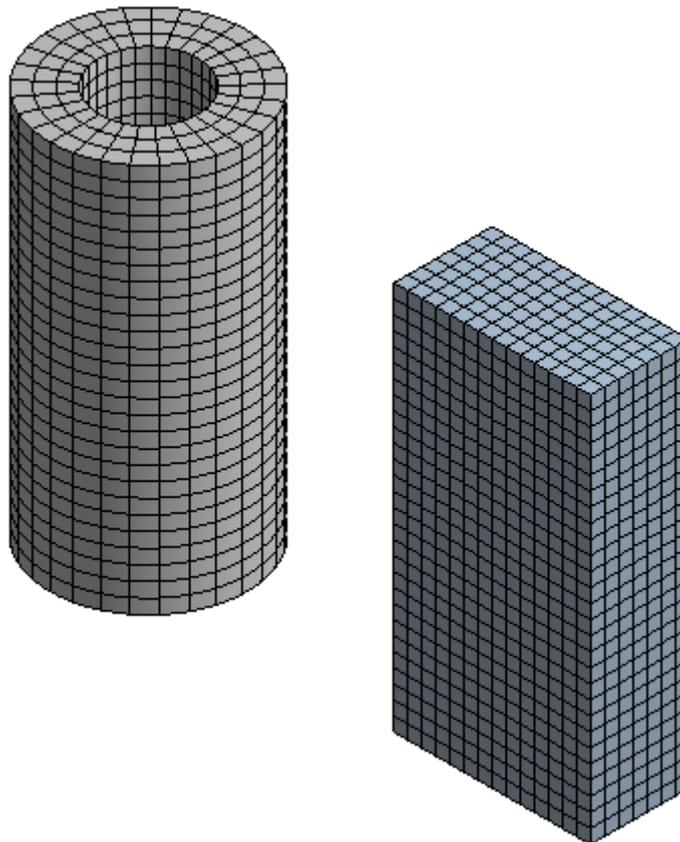
1 Introduction

1.1 Présentation du principe du calcul par la méthode des éléments finis

La méthode de calcul par éléments finis est une approche numérique permettant de décrire divers phénomènes physiques basés sur des équations différentielles. De manière générale, cette approche est utilisée afin d'étudier et prévoir le comportement mécanique, thermique ou électrique d'un système.

L'idée derrière cette approche, est alors de subdiviser/discrétiser une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes simples appelés « **éléments** ». Ces éléments sont interconnectés en des points appelés « **nœuds** ». On appelle alors l'ensemble de ces éléments et de ces nœuds le « **maillage** ».

Illustration d'un maillage :



Ce rapport sera principalement axé sur le calcul de structure mécanique, bien que d'autres types y soient abordés. Néanmoins certains grands principes ainsi que la philosophie seront valables quel que soit le type d'étude.

Ce document abordera les choses d'une manière plus pragmatique que les théories mathématiques sur lesquels repose cette méthode. L'approche de ce document s'oriente plus sur les principes concrets des logiciels de calculs par éléments finis.

1.2 Unité de modélisation

Lors d'un calcul par éléments finis, un certain nombre de propriétés et de phénomènes sont à retranscrire afin de modéliser les corps physiques selon des propriétés spécifiques. Chacune de ces propriétés et phénomènes sont décrits selon des unités propre à chaque grandeur physique.

De manière général on préférera utiliser les unités de modélisation suivantes :

Grandeurs physiques :	Unités :
Longueur	Millimètre [mm]
Effort	Newton [N]
Pression	Mégapascal [MPa – N/mm ²]
Couple	Newton millimètre [N.mm]
Température	Degrés Celsius [°C]
Temps	Seconde [s]
Vitesse	Millimètre par seconde [mm/s]
Masse	Tonne [t]

Il faut noter que de manière générale le choix des unités de grandeur physique dépend des dimensions renseignées en entrée du logiciel de calcul. Par exemple si on définit la géométrie en millimètre les résultats de déplacement seront en millimètre. Néanmoins, certains logiciels permettent de convertir l'unité d'une même grandeur afin de faciliter l'exploitation des résultats.

Remarque : Quel que soit le **système d'unité** choisit il est primordial que les unités choisies soient **homogènes** entre elles.

1.3 Principaux logiciels de calcul par élément finis

Il existe une multitude de logiciels de calcul qui se basent sur la méthode de calcul par les éléments finis. Voici une liste non exhaustive des codes de calculs les plus utilisés dans le milieu industriel et universitaire :

- NASTRAN NX
- ANSYS
- ABAQUS
- DYNA3D
- ASTER
- SAMCEF
- SolidWorks Simulation
- ZEBULON
- I-DEAS
- CASTEM

Nadir Ingenia propose un support de cours sur la présentation du logiciel de calcul par élément finis gratuit et open source **Salome_Meca & Code_Aster**.

Lien du support : <https://nadir-ingenia.fr/elements-finis/>

2 Démarche générale

Lors d'une simulation par éléments finis, on distingue de manière générale 3 grandes étapes pour la réalisation d'un calcul.

Il est présenté ci-dessous le plan de la démarche générale pour la réalisation d'une étude par la méthode des éléments finis. Pour rappel, dans ce rapport il sera présenté principalement la démarche d'une analyse de structure mécanique.

Etape 1 : Pré-traitement / Préparation du modèle [Preprocessing]

- Réalisation de la géométrie
- Simplification de la géométrie
- Préparation de la géométrie
- Définition des propriétés matériaux
- Définition des éléments utilisés
- Réalisation du maillage
- Application des conditions aux limites
- Application des chargements

Etape 2 : Calcul [Solveur]

- Paramétrage de l'étude
- Réalisation du calcul

Etape 3 : Post-traitement / Analyse des résultats [Postprocessing]

- Extraction des résultats souhaités
- Analyse des résultats du modèle
- Exploitation des résultats

La suite de ce document suivra ce plan de manière à présenter et expliquer de manière pédagogique les grands fondamentaux de chacune de ces étapes. Le but étant de présenter aux travers de celles-ci les grands principes généraux de la méthode par éléments finis.

3 Etape 1 : Pré-traitement / Préparation du modèle

(Preprocessing)

3.1 Réalisation de la géométrie

La première étape de la méthode de calcul par éléments finis consiste à réaliser la géométrie du système à étudier.

Une géométrie dans un calcul par élément finis peut alors prendre plusieurs formes :

- Volumique (3D)
- Surfactive (2D)
- Linéique (1D)
- Ponctuelle (0D)

De manière général, les logiciels de calcul par éléments finis intègrent un éditeur de géométrie afin de réaliser la géométrie directement sur le logiciel. Néanmoins, dans la pratique la géométrie est réalisée le plus souvent sur un logiciel de Conception Assisté par Ordinateur (CAO) pour ensuite être importée dans le logiciel de calcul. Les formats d'importation les plus répandus sont les formats «**.STEP**» ou «**.IGES**».

3.2 Simplification de la géométrie

La géométrie d'un système possède un certain nombre de complexités géométriques nécessaires du fait de leurs fonctionnalités. Dans certains cas, une simplification peut être réalisée sur cette géométrie afin de travailler sur une géométrie optimisée pour le calcul. En effet, certaines de ces complexités géométriques, comme des chanfreins et des cassures d'angles ou des congés, peuvent alors être supprimées dans le cas où elles n'ont pas d'influence directe sur l'analyse.

Par ailleurs, certains angles très ouverts peuvent également être adouci afin d'éviter des points singuliers qui pourront être source d'erreur numérique lors du calcul.

Il est à noter que toute simplification ne peut être réalisée uniquement dans le cas où elle n'intervient pas dans la rigidité globale du système ou si elle est de dimension négligeable. Ces simplifications permettront un maillage plus efficient.

3.2.1 Simplification de géométrie symétrique

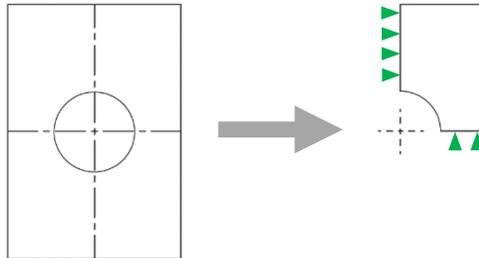
Lorsqu'un système étudié possède un ou plusieurs plans de symétrie, une simplification géométrique est possible afin de réaliser un modèle uniquement constitué de la partie symétrique de celui-ci. Une simplification de ce type permet alors de travailler sur un modèle de dimension réduite et donc de gagner en ressource de calcul.

Néanmoins cette simplification n'est possible que dans certains cas particuliers.

Pour pouvoir réaliser une simplification symétrique il faut impérativement vérifier les critères suivants :

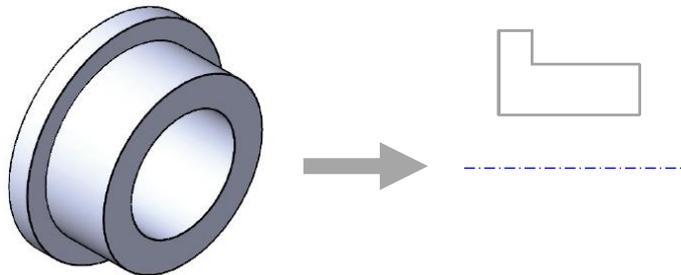
- Géométrie qui possède un ou des **plan(s) de symétrie(s)**
- **Chargements symétriques** (attention condition essentielle et nécessaire)

Si une simplification symétrique est possible, il faut impérativement mettre en place des conditions aux limites adaptées pour réaliser la simplification. La condition aux limites adaptée à une simplification géométrique correspond à un blocage de déplacement dans la direction perpendiculaire du plan de coupe.



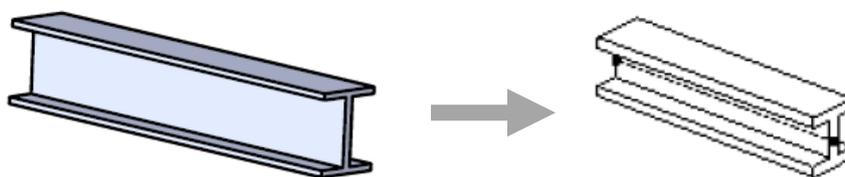
3.2.2 Simplification de géométrie de révolution (axisymétrique)

Lorsque la géométrie du système étudié est une géométrie de révolution, il est possible de réaliser l'étude sur la géométrie surfacique (2D) du plan de révolution en utilisant des éléments spécifiques. Cette simplification n'est possible uniquement dans le cas de **chargement axisymétrique**.



3.2.3 Simplification dimensionnelle géométrique

La méthode de calcul par élément finis permet dans certains cas d'étudier un système complexe volumique en simplification dimensionnelle grâce à des éléments spécifiquement dédiés. Par exemple, les éléments poutres dédiés permettent de retranscrire le comportement d'une poutre grâce à des éléments 1D.



Modèle 3D :
Volume

Modèle 1D :
Segment

3.3 Préparation de la géométrie

Dans certains cas particuliers une préparation et une adaptation de la géométrie est nécessaire pour pouvoir réaliser le calcul. En effet, certaines surfaces ou zones doivent être préalablement définies sur la géométrie, de manière à pouvoir appliquer différents chargements ou conditions aux limites sur ces zones lors de la configuration du calcul de l'étude.

Il faut donc réfléchir en amont à la façon dont on souhaite réaliser le calcul.

3.4 Définition des propriétés des matériaux

3.4.1 Introduction aux propriétés des matériaux

De manière générale, le choix d'un matériau pour une application donnée est la conséquence de propriétés adaptées dans un ou plusieurs domaines ciblés.

On distingue plusieurs types de propriétés des matériaux :

- Propriétés mécaniques
 - Modules d'élasticité, limite d'élasticité, écrouissage, ductilité.
 - Viscosité, vitesse de fluage, amortissement
 - Charge à la rupture, résistance à la fatigue
- Propriétés physiques
 - Conductibilité électrique, aimantation,
 - Conductibilité thermique, chaleur spécifique, température et chaleur latente
 - Énergie de surface
 - Masse volumique
- Propriétés chimiques
 - Résistance à la corrosion, à l'oxydation, stabilité.

Lors d'une simulation par la méthode des éléments finis, ces propriétés du matériau sont donc à retranscrire d'un point de vue numérique au modèle.

Remarque : seules les propriétés nécessaires au calcul sont à retranscrire.

3.4.2 Loi des comportements des matériaux

Le comportement mécanique d'un matériau est régi par sa loi de comportement. Cette loi est identifiée à la suite de la réalisation d'essais. Elle permet de modéliser le comportement mécanique en identifiant des propriétés clés permettant de caractériser son comportement.

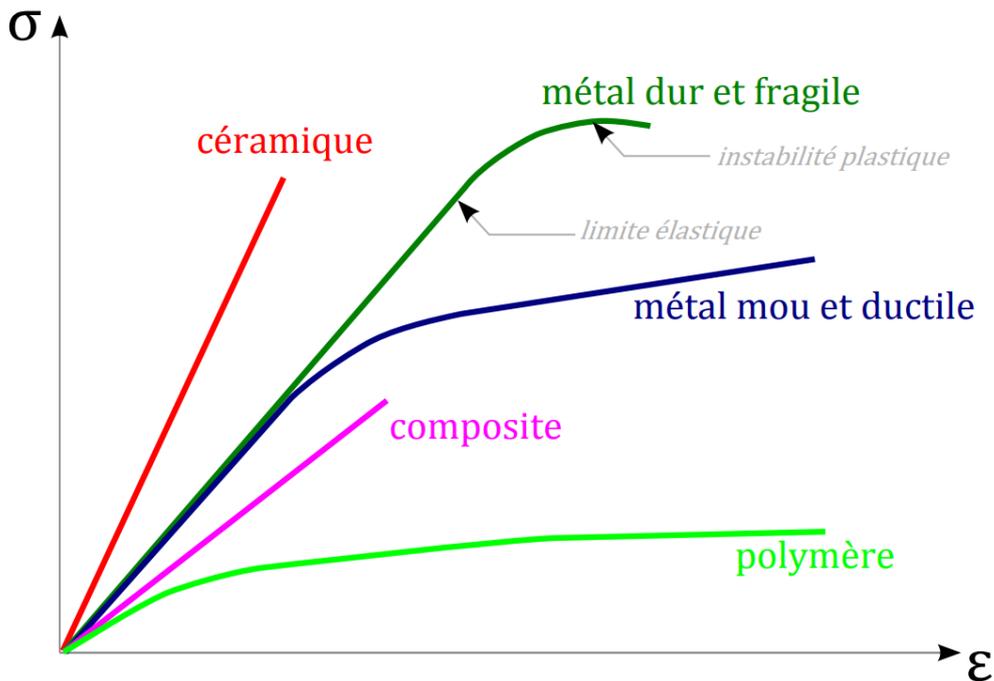
La loi de comportement d'un matériau relie la contrainte au sein du matériau à sa déformation.

Il existe une multitude de lois matériaux permettant de représenter chaque type de matériau. Les logiciels de calcul par éléments finis intègrent de manière générale une multitude de ces lois matériaux, qui nécessitent la paramétrisation de certaines variables pour modéliser leur comportement.

Liste non-exhaustive des principales lois matériaux :

- Loi élastique isotrope linéaire (acier, aluminium, titane, ...)
- Loi élasto-plastique (loi de comportement admettant une certaine plasticité)
- Loi de matériaux composites (composites stratifiés, sandwich, ...)
- Loi hyper-élastique (élastomères)
- Loi viscoélastique (certains polymères)

Exemple de comportement de différents matériaux :

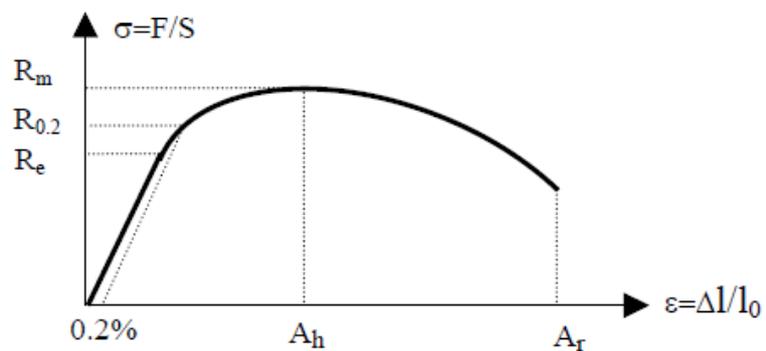


Dans ce rapport, seule la loi de comportement « élastique isotrope linéaire » sera abordée. Cette loi est la plus classique et la plus utilisée puisqu'elle régit la grande majorité des matériaux métalliques.

Loi élastique isotrope linéaire :

Isotrope : signifie que le comportement est identique quelle que soit la direction de la sollicitation.

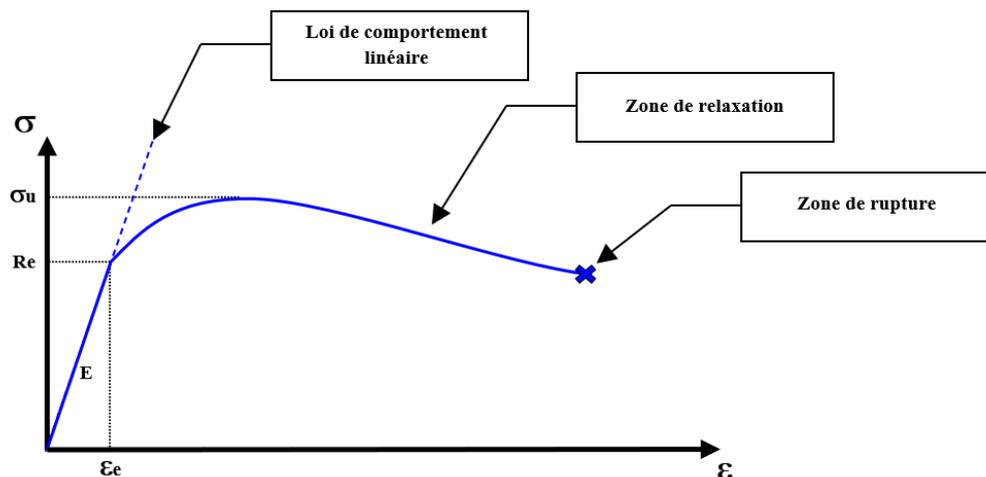
Cette loi s'appuie sur l'essai de traction (ou essai d'écroutissage) :



Cette loi correspond à une droite linéaire de la forme « $y = ax$ » passant par la résistance élastique (R_e) du matériau. Le coefficient directeur de cette droite correspond au module d'Young du matériau.

Propriétés définissant cette loi de comportement :

- E : module d'Young (MPa)
- ν : coefficient de poisson

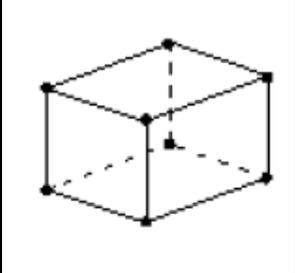
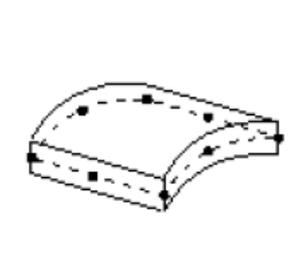
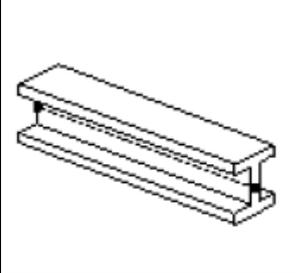
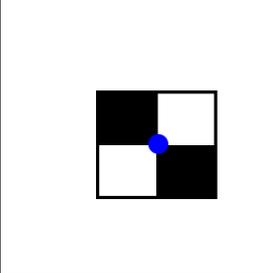


Remarque : cette loi n'est valable que jusqu'à la résistance élastique du matériau (R_e). Toute valeur supérieure n'aura pas de sens physique.

3.5 Définition du type d'éléments utilisés

Lors d'une analyse par éléments finis la géométrie est discrétisée par un certain nombre d'éléments. Cette discrétisation est réalisée avec des éléments pouvant être de plusieurs formes.

Le type d'éléments choisi pour réaliser le maillage est directement lié à la géométrie qui est à discrétiser.

			
Elément volumique : 3D	Elément surfacique : 2D	Elément unidimensionnel : 1D	Elément ponctuel : 0D

3.5.1 Degrés d'interpolation des éléments

Dans un modèle par éléments finis, les éléments sont définis par rapport à ce qu'on appelle le « degré d'interpolation » correspondant aux fonctions de formes. Cette grandeur définit l'interpolation des valeurs entre deux nœuds d'un élément.

On distingue deux types d'interpolation :

- 1^{er} ordre / linéaire
- 2^{ème} ordre / quadratique (avec nœuds intermédiaire [midside node])
- 3^{ème} ordre / cubique

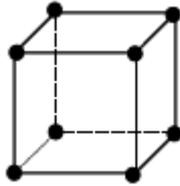
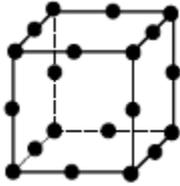
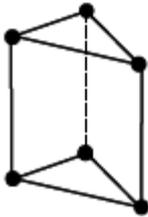
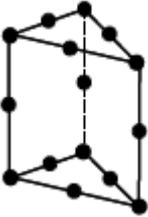
Un élément avec une interpolation plus élevée convergera plus rapidement mais demandera plus de ressources de calcul.

Dans ce document les éléments cubiques, largement moins répandus ne seront pas traités.

Remarque : de manière générale les éléments avec une interpolation du second ordre (quadratique) sont à favoriser.

3.5.2 Eléments volumiques – 3D

Ces éléments sont utilisés pour discrétiser une géométrie volumique.

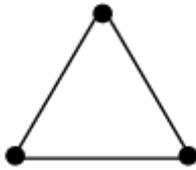
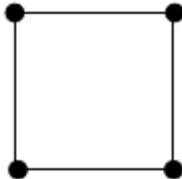
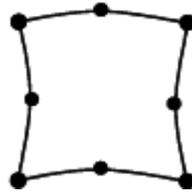
Forme	Interpolation linéaire	Interpolation quadratique
Tétraédrique	 <p>TE4 – 4 nœuds</p>	 <p>TE10 – 10 nœuds</p>
Hexaédrique	 <p>H8 - 8 nœuds</p>	 <p>H20 - 20 nœuds</p>
Prismatique	 <p>P6 - 6 nœuds</p>	 <p>P15 - 15 nœuds</p>

Pour des calculs de structure mécanique les éléments quadratiques sont à privilégier.

Remarque : les éléments tétraédriques sont les éléments qui sont les plus permissifs du fait de leur topologie. Leur méthode de discrétisation est ainsi la plus simple pour les géométries complexes. Néanmoins il faut favoriser les éléments hexaédriques si possible.

3.5.3 Elément surfacique – 2D

Ces éléments sont utilisés pour discrétiser une géométrie plane.

Forme	Interpolation linéaire	Interpolation quadratique
Triangulaire	 <p>T3 – 3 nœuds</p>	 <p>T6 – 6 nœuds</p>
Quadrangle	 <p>Q4 - 4 nœuds</p>	 <p>Q8 - 8 nœuds</p>

3.5.4 Elément unidimensionnel – 1D

Ces éléments sont utilisés pour discrétiser une géométrie linéique.

Forme	Interpolation linéaire	Interpolation quadratique
Ligne / Courbe	 <p>L1 – 2 nœuds</p>	 <p>L2 – 3 nœuds</p>

3.5.5 Elément ponctuelle

Ces éléments sont utilisés pour discrétiser une géométrie ponctuelle. Du fait de leur forme singulière, il n'y a pas d'interpolation dans ce type d'élément.

Remarque : ces éléments peuvent être utilisés pour mailler des éléments masse par exemple.

3.6 Réalisation du maillage de la géométrie

L'ensemble des éléments modélise les propriétés physiques du système. Par ce fait de manière générale et dans une certaine mesure, plus le nombre d'éléments est important plus le modèle représentera correctement la physique du système.

Remarque : néanmoins dans le cas de densité extrême d'éléments dans une zone, des erreurs numériques peuvent apparaître.

Un modèle avec un grand nombre d'éléments demandera des ressources de calculs conséquentes et donc un temps de calcul élevé. Un compromis entre précision et temps de calcul est alors à trouver, dépendant du système à étudier.

Lors d'une analyse par éléments finis le maillage est primordial, puisque c'est de lui que sont construits et extrait les résultats.

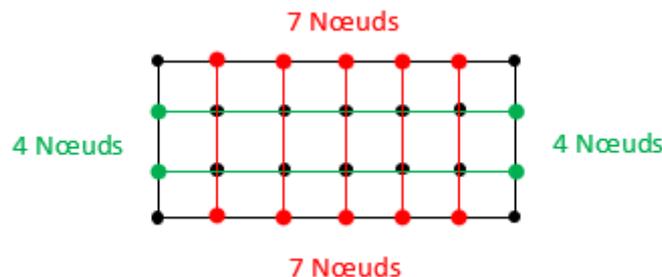
Règle : dans les règles de l'art il est préconisé d'avoir un minimum de « 2 » éléments (quadratiques) dans l'épaisseur et un minimum de « 5 » nœuds dans les rayons de courbures.

3.6.1 Notion de mappage de surface

De manière générale, afin d'obtenir une bonne qualité de maillage et favoriser un maillage avec des éléments de taille homogène et non difforme, on tend à réaliser un maillage avec des éléments alignés formant un quadrillage. On appelle cette opération de quadrillage un « mappage » des surfaces.

Pour réaliser un mappage, il faut que chaque arrêtes opposées d'une surface possède un nombre de nœuds identiques.

Exemple de mappage d'une surface rectangulaire avec des éléments quadrangle :



3.6.2 Vérification de la qualité des éléments

Lors de l'opération de maillage, l'algorithme du logiciel (qui décompose la géométrie en plusieurs éléments) déforme les éléments afin qu'ils puissent prendre la forme de la géométrie.

Les éléments ainsi déformés possèdent les mêmes équations physiques de modélisation qu'un élément de dimension parfaite. De ce fait, un élément difforme retranscrira mal la physique du modèle. Il est donc primordial que le maillage soit réalisé suffisamment finement afin que les éléments s'approchent le plus possible de la forme idéale de l'élément en question.

La plupart des logiciels de calcul par éléments finis proposent des modules de contrôle des éléments. Ce contrôle peut s'effectuer sur la base de plusieurs critères.

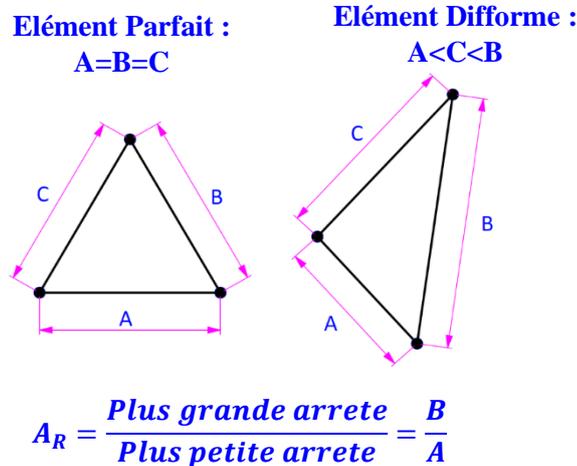
3.6.3 Ratio de forme / Aspect ratio

Le Ratio de forme ou « **Aspect Ratio** » quantifie la difformité géométrique d'un élément. Ce critère peut être appliqué pour le maillage de géométrie en « 2D » et en « 3D ».

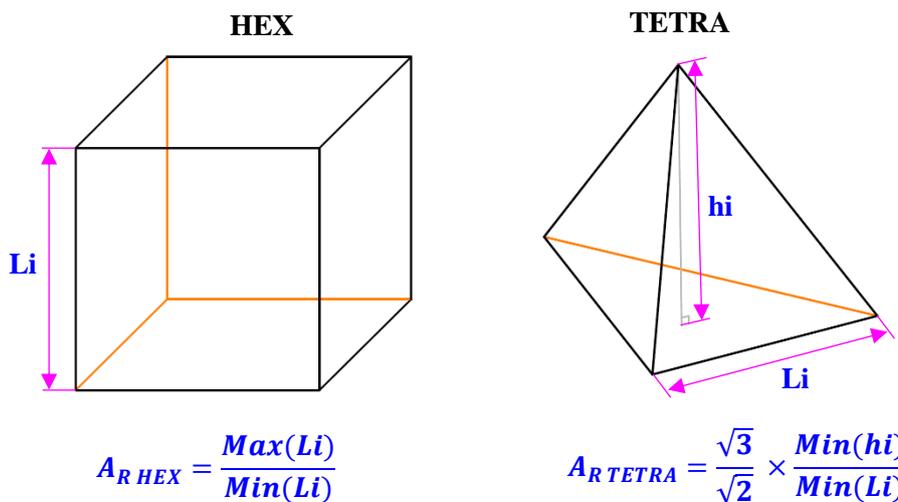
De manière générale, on fixe un critère d'acceptabilité sur la valeur d'aspect ratio maximale acceptable pouvant aller jusqu'à « 10-15 » sur l'ensemble du modèle. La bonne pratique, étant d'avoir des éléments au plus proche de la forme parfaite, c'est à dire ayant une valeur d'aspect ratio de « 1 » dans les zones critique du modèle.

Ratio de forme (Aspect Ratio) – 2D :

Pour les éléments plan le ratio se calcule en divisant la longueur de la plus grande arête par celle de la plus petite d'un élément.



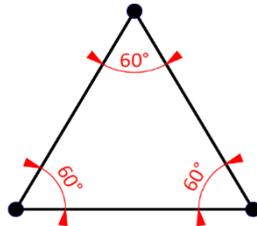
Ratio de forme (Aspect Ratio) – 3D :



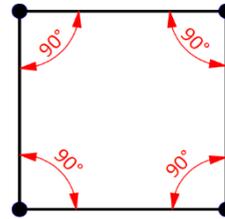
Remarque : le critère sur l'aspect ratio est le critère minimum à vérifier dans une analyse par éléments finis. Il existe certaines variantes de méthode de calcul pour déterminer ce ratio selon le logiciel utilisé. Néanmoins le principe reste identique : **quantifier la difformité de l'élément.**

3.6.4 Contrôle des angles

Le contrôle des angles ou « Angle » quantifie la somme de déviance angulaire d'un élément selon sa topologie.



Angle de référence
Triangle /
tétraèdre : 60°

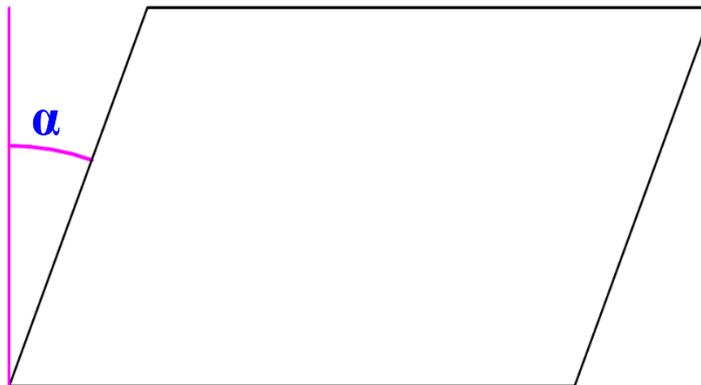


Angle de référence
Quadrangle /
Hexaèdre : 90°

$$Critère_{Angle} = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \alpha_{réf}|$$

Pour le contrôle des angles, le seuil du critère d'acceptabilité dépend de la topologie des éléments. Pour des éléments triangulaires ou tétraédriques, on accepte une déviance angulaire maximale de « 30° » et de « 45° » pour les éléments quadrangles et hexaédriques.

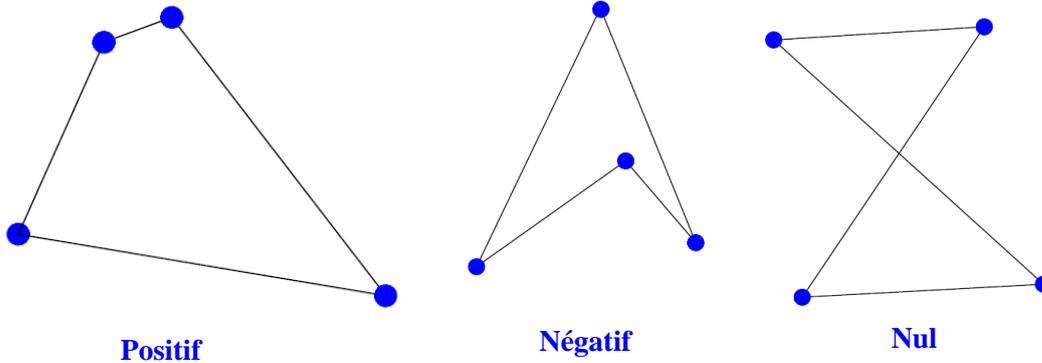
3.6.5 Contrôle du twist des angles (skew angles)



Le critère du « skew angle » mesure l'angle du twist de l'élément. La valeur parfaite est définie à « 0° » et on accepte un angle maximal de twist à « < 45° »

3.6.6 Ratio du Jacobien (Jacobian)

Le critère mesure le rapport entre le plus petit et le plus grand terme du Jacobien de l'élément.



Le déterminant de la matrice jacobienne peut être :

- Positif : éléments corrects (idéalement au voisinage de l'unité (= 1))
- Négatif : éléments distordus (source de problèmes de convergence)
- Nul : éléments mal définis

3.6.7 Autre type de contrôle des éléments

On peut noter d'autre type de contrôle du maillage plus spécifique, qui ne seront pas détaillés dans ce document, comme notamment :

- Taper (contrôle de surface des éléments)
- Waring (gauchissement des éléments)
- Colapse (écrasement d'éléments volumiques)

3.7 Application des conditions aux limites

Lors d'un calcul par éléments finis il est impératif de bien conditionner le modèle, dans le but de retranscrire au mieux lors de la simulation, le comportement du système réel. On distingue alors plusieurs conditions aux limites pouvant être imposées au modèle dans plusieurs directions possibles. Les principaux étant des blocages en translation, en rotation ou des déplacements imposés.

Le calcul par éléments finis se basant sur un équilibre entre les efforts extérieurs et les chargements, un calcul sur un modèle pas ou mal conditionné ne pourra être réalisé (sauf analyse particulière, comme une analyse modale par exemple).

Il faut donc, dépendamment de la dimension du modèle, imposer un certain nombre minimum de conditions :

Dimension	Translation			Rotation		
	DX	DY	DZ	RX	RY	RZ
1D	X	X	X	X	X	X
2D	X	X	X	X	X	X
3D	X	X	X	-	-	-

L'application des conditions aux limites est toujours appliquée sur les nœuds des éléments. Néanmoins de manière générale, il est plus facile d'imposer des conditions aux limites sur la géométrie du modèle (point, ligne, surface et volume) qui seront ensuite retranscrites par le logiciel aux nœuds associés.

Il est parfois nécessaire de créer/découper des surfaces pour l'application des conditions aux limites.

3.8 Application des chargements

La méthode de calcul par élément finis permet de prendre en considération plusieurs types de chargements sur le modèle, les principaux étant :

- Effort
- Moment
- Chargement à distance
- Pression
- Température

L'application des chargements est toujours appliquée sur les nœuds des éléments. Néanmoins de manière générale, il est plus facile d'imposer des chargements sur la géométrie du modèle (point, ligne, surface et volume) qui seront ensuite retranscrites par le logiciel aux nœuds associés.

Il est parfois nécessaire de créer/découper des surfaces pour l'application des chargements.

4 Etape 2 : Calcul (Solveur)

4.1 Paramétrage de l'étude

La méthode de calcul par éléments finis permet de résoudre plusieurs problèmes physiques à travers différents types d'analyses. L'étape du paramétrage de l'étude doit définir quel type d'analyse doit être réalisée.

Il est listé ci-dessous différents exemples des types d'analyses les plus utilisés.

4.1.1 Analyse statique

L'analyse statique est l'analyse classiquement la plus utilisée en calcul des structures. Elle correspond à l'étude de système soumis à des efforts permanents (indépendance de la temporalité).

Equation fondamentale de la statique :

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$\{U\}$: Vecteur des degrés de liberté du système (de dimension (n)) → Inconnus à déterminer pour résoudre l'analyse (correspond aux déplacements et aux rotations des nœuds)

$[K]$: Matrice de rigidité caractérisant le système (de dimension (n x n))

$\{F\}$: Vecteur des sollicitations mécaniques appliquées sur le système (de dimension (n))

4.1.2 Analyse dynamique

L'analyse dynamique est une analyse d'une structure dans des conditions à évolution temporelle. Ce type d'étude est plus complexe et nécessite la définition de « pas de temps » et « d'itération » pour la réalisation du calcul.

Equation fondamentale de la dynamique :

$$[M]\{U''\} + [D]\{U'\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$\{U\}$: Vecteur des degrés de liberté du système (de dimension (n)) → Inconnus à déterminer pour résoudre l'analyse (correspond aux déplacements et aux rotations des nœuds)

$\{U'\}$: Dérivée du vecteur des degrés de liberté du système - Vitesse (de dimension (n))

$\{U''\}$: Dérivée seconde du vecteur des degrés de liberté du système – Accélération (de dimension (n))

$[D]$: Matrice d'amortissement caractérisant le système (de dimension (n x n))

$[M]$: Matrice de masse caractérisant le système (de dimension (n x n))

$\{F\}$: Vecteur des sollicitations mécaniques appliquées sur le système (de dimension (n))

4.1.3 Analyse modale

Chaque système possède un certain nombre de modes propres correspondant à des fréquences de vibrations naturelles de celui-ci. La réalisation d'une analyse modale (ou analyse fréquentielle) permet d'identifier ces modes de vibration. Cette analyse est une étude dérivée de l'analyse dynamique.

Dans une analyse par éléments finis, les modes propres d'un système se déterminent avec la résolution de l'équation matricielle suivante :

$$\text{Det} | [K] - \omega^2 [M] | = 0$$

[K] : Matrice de rigidité caractérisant le système (de dimension (n x n))

[M] : Matrice de masse caractérisant le système (de dimension (n x n))

ω : Pulsation propre (rad/s)

Rappel : $\omega = 2\pi f$

f : fréquence propre

Pour le calcul des différents modes propres, seule la masse et la raideur sont prises en compte, il est donc important de les modéliser le plus fidèlement possible.

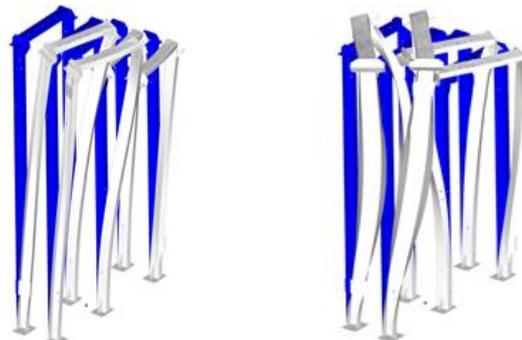
Dans le cadre d'une analyse modale le système possède autant de fréquences propres que de degré de liberté (DDL / DOF). Néanmoins, de manière générale, on s'intéresse uniquement aux premiers modes propres.

Pour un modèle qui n'est pas conditionné, des modes propres à fréquences nulles peuvent être calculés. Ces modes sont dits de « corps rigide » et correspondent à des translation / rotation du corps en entier.

On peut noter que lors de l'analyse modale, des résultats en déplacement sont calculés. Néanmoins ces déplacements ne peuvent être directement exploités tels quels. En effet ils correspondent à une vibration et dépendent donc de l'amplitude de l'excitation. Seul un ratio de proportionnalité entre les éléments est calculé.

Remarque : Aucun chargement n'est considéré dans le calcul. Dans le cas où le chargement influe sur la raideur du système (corde de guitare par exemple) un paramétrage en amont devra être réalisé pour précontraindre le système.

Illustration de différents modes d'une analyse modale d'un portique mécano-soudé :



4.1.4 Analyse en réponse harmonique

Une analyse harmonique est une étude où on excite un système selon une plage de fréquences donnée, dans le but d'analyser sa réponse fréquentielle.

4.1.5 Analyse modale de flambement (Buckling)

Une analyse de flambement peut être réalisée dans le but d'identifier le comportement d'une structure sous charge de flambement. Une analyse de ce type doit être réalisée à la suite d'une analyse statique avec un chargement unitaire afin d'identifier le facteur de « **rigidité géométrique** » de la structure.

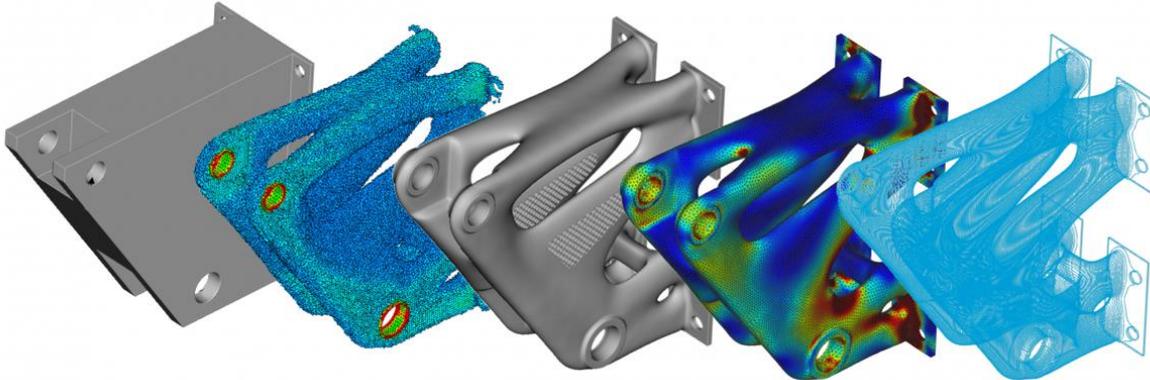
4.1.6 Optimisation paramétrique

Une analyse de type optimisation paramétrique permet de pouvoir optimiser un modèle selon différents critères définis dans le paramétrage de l'analyse en jouant sur des variables géométriques ou matériaux par exemple.

4.1.7 Optimisation topologique

Une analyse de type optimisation topologique permet d'optimiser la forme d'un modèle en optimisant la souplesse du modèle (compliance). Ce type d'étude est fortement utilisée pour la fabrication additive.

Illustration d'une optimisation topologique :



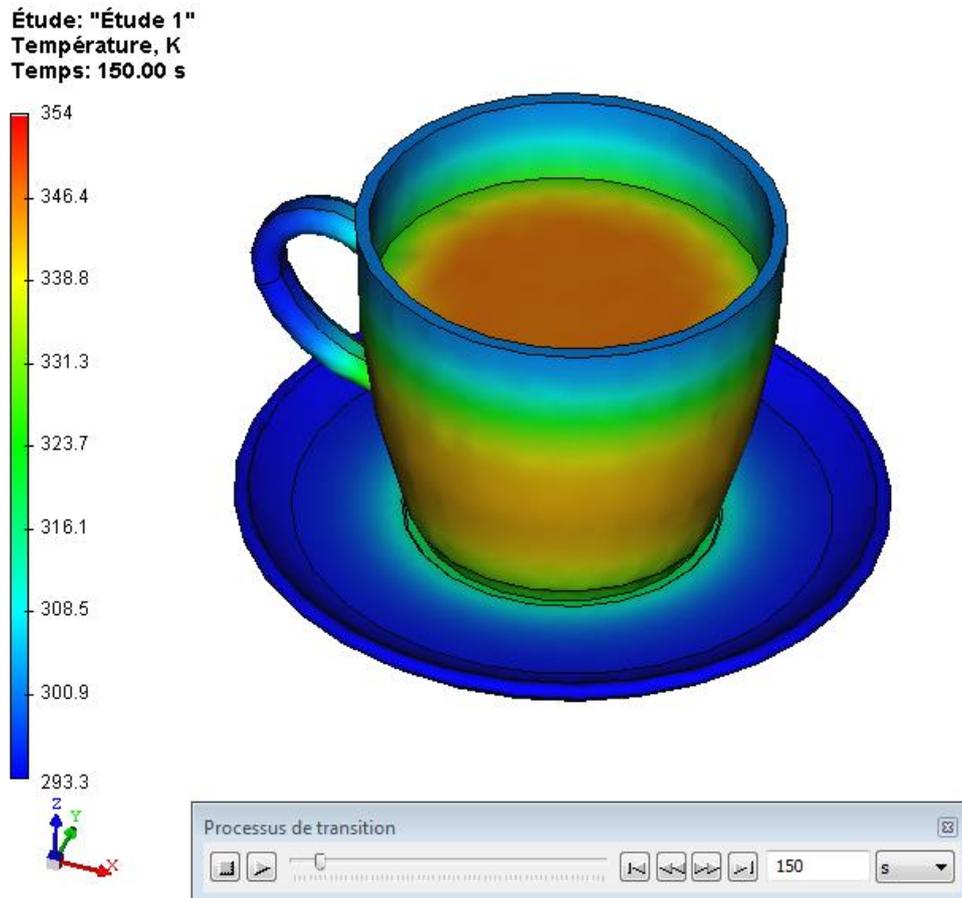
L'idée générale est de partir d'un « bloc de matière » et d'identifier par certains critères, où il est possible d'enlever de la matière.

Remarque : pour réaliser une optimisation de ce type, il est nécessaire de déclarer les faces fonctionnelles pour indiquer au logiciel quelles faces sont nécessaires pour la pièce.

4.1.8 Etude Thermique

Une analyse thermique permet d'étudier les échanges thermiques de différents systèmes.

Illustration d'une étude thermique sur une tasse à café :



4.1.9 Autres types d'analyse

Il existe une multitude d'autres types d'analyses notamment des études de mécanique des fluides mais également de champs magnétiques/électriques.

4.1.10 Non linéarité d'une analyse

Dans le cas général, des équations d'ordre linéaire suffisent à modéliser convenablement la physique du réel. Néanmoins dans certains cas de figure, une analyse plus poussée avec des équations représentant la physique avec des équations non linéaires est alors nécessaire. On distingue plusieurs cas de non-linéarité dans le cadre d'une analyse par éléments finis.

Non linéarité matériel – loi de comportement non linéaire :

Une première possibilité de non-linéarité est dans le cas de loi de comportement non linéaire, par exemple dans le cas de modélisation d'élastomère.

Non linéarité de contact :

Dès lors qu'un système est composé de plus d'une pièce, des contacts entre pièces existent et doivent donc être modélisés.

On distingue alors deux types de contact :

- **Collage** (Glued) – Aucun décollement possible de la matière (fusion des pièces)
- **Contact** - Pas de pénétration / décollement possible

Pour définir un contact, on procède de la manière suivante :

- Caractérisation et paramétrage du type de contact
- Déclaration des surfaces en contact
- Association du paramétrage aux surfaces en contact

Un contact par collage ne possède pas de non-linéarité et peut donc être utilisé dans le cadre d'une analyse linéaire. Il correspond à de l'association commune des nœuds en contact.

Remarque : un contact est régi par des lois non linéaires, il est donc réalisable uniquement dans le cadre d'une analyse non linéaire. Néanmoins, il est à noter que certains codes de calculs permettent d'utiliser du contact dans une analyse linéaire en connectant les zones de contact prédéfinies par des éléments ressorts avec une raideur adaptée par rapport aux matériaux en contact.

Attention : lors de l'utilisation d'un contact il y a une notion de surface maître et de surface esclave. Les nœuds de la surface maître sont projetés sur les éléments de la surface esclave. La surface maître doit donc être maillée plus finement que la surface esclave (à minima avec un maillage équivalent).

Non linéarité de grands déplacements et grandes déformations :

Le calcul linéaire se base sur l'hypothèse de petits déplacements et petites déformations. Par conséquent, si un calcul obtient des résultats de déplacement important (dépendant de l'ordre de grandeur du modèle, on peut alors considérer un résultat d'analyse de déplacement cohérent environ 10 à 20% de l'ordre de grandeur du modèle (sauf cas de pièces difformes par rapport à l'ordre de grandeur général du système)).

Lors de grands déplacements ou de grandes déformations il faut donc utiliser un solveur non linéaire.

4.2 Réalisation du calcul

Une fois l'étude définie et paramétrée le calcul peut être lancé par le logiciel. De manière générale, il est préférable d'enregistrer le modèle directement sur le poste de calcul et non sur un réseau externe. En effet, durant le calcul des fichiers résultats seront enregistrés dans le dossier de l'étude et seront en permanence en écriture et en lecture par le logiciel. Le fait d'enregistrer l'analyse en local permet donc de gagner en temps de calcul.

5 Etape 3 : post-traitement / Analyse des résultats

(Postprocessing)

5.1 Extraction des résultats souhaités

De manière générale chaque analyse propose d'extraire les résultats principaux de l'étude de manière automatique. Néanmoins il est possible d'extraire des résultats supplémentaires dans le cas où c'est nécessaire.

5.2 Analyse des résultats du modèle

Une fois l'analyse terminée la première étape consiste à examiner la pertinence des résultats. Pour une analyse de structure, il s'agit d'examiner le type de déformation du modèle, et l'ordre de grandeur de contrainte et de déplacement.

5.2.1 Notion de contrainte

En mécanique, la contrainte est une grandeur physique correspondant à la pression interne d'un système. La contrainte est liée aux différentes sollicitations que subit un système.

Lorsqu'un système est sollicité mécaniquement très sévèrement, cette contrainte peut atteindre une valeur trop importante, valeur dépendant du matériau, qui mène à la ruine mécanique du système.

Cette valeur numérique peut être positive dans le cadre de traction et négative en compression.

Dans le cadre d'étude mécanique pour le dimensionnement de structure métallique on utilise principalement la contrainte de Von Mises. Cette contrainte donne un état des lieux général de la contrainte au sein de la pièce. En dissociant toute notion de traction et compression, cette valeur est définie uniquement positive.

Calcul de la contrainte de Von Mises :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

5.2.2 Vérification du modèle – Equilibre des Forces

Une vérification de l'équilibre des forces peut être réalisée afin de vérifier la cohérence et le bon conditionnement du modèle (balance des forces) : la somme des actions extérieures (chargement) appliquée doit être égale aux réactions sur toutes les conditions aux limites.

Cette vérification est primordiale pour vérifier que les chargements sont correctement appliqués au modèle. En effet, il est bon d'avoir en mémoire que certaines erreurs peuvent être commises lors de l'application d'efforts sur le modèle en sélectionnant plusieurs entités. En effet, lors de l'application d'un effort, celui-ci peut être partagé entre toutes les entités sélectionnées, ou bien être identique pour chaque entité.

5.2.3 Notion de singularité

Les modélisations basées sur la mécanique des milieux continus conduisent, dans un certain nombre de cas particuliers, à des contraintes « infinies » en certains points : les singularités. Ces valeurs infinies sortent du domaine de validité de la plupart des modélisations et, dans le cadre des simulations par éléments finis, pourraient mener un concepteur néophyte à des erreurs d'analyse.

Lors d'une analyse de résultat il est important d'étudier la cohérence des résultats, en effet à certains endroits singuliers et ponctuels des valeurs calculées par le modèle peuvent n'avoir aucune cohérence et pertinence physique, on appelle ce cas de figure une singularité.

Une singularité peut provenir de plusieurs causes différentes, les principaux étant un angle droit de « 90° », à proximité d'élément rigide indéformable ou alors d'éléments extrêmement difformes.

De manière générale, il est important de garder en mémoire que la méthode de calcul par éléments finis s'appuie sur une approche de la mécanique des milieux continus. Il faut donc éviter toute aspérité brusque ou tout angle ouvrant important sur le modèle au niveau des passages des efforts (chemin entre les zones d'application de l'effort et les conditions aux limites).

Afin de s'affranchir de ce phénomène, il est possible de simplifier la géométrie en ajoutant un arrondi ou un congé sur un angle droit.

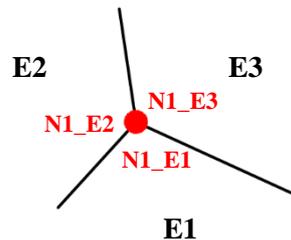
Dans le cas de présentation de résultats, il est possible de cacher les points singuliers de l'étude ou de rabaisser l'échelle d'affichage des résultats. Néanmoins une précaution est à prendre dans la gestion de ces singularités.

5.2.4 Contrôle de la déviance des nœuds

Afin de s'assurer que le maillage est bien réalisé et de manière assez fine une analyse de déviance des nœuds peut être réalisée. Cette analyse doit être réalisée sur un ou plusieurs nœuds d'une zone de concentration de contrainte.

Pour bien comprendre ce contrôle, il est nécessaire de d'abord comprendre le fonctionnement d'affichage de valeur des résultats au niveau des nœuds. La valeur affichée d'un nœud, par exemple la contrainte, dépend du paramétrage du logiciel. De manière générale un logiciel affiche par défaut la valeur moyenne des nœuds de chaque élément adjacent que compose ce nœud.

Illustration du propos :



Sur cette illustration le nœud « **N1** », appartient à 3 éléments différents. Pour chaque élément (E1, E2 et E3) la valeur de contrainte de ce nœud est calculée. La valeur de contrainte retenue du nœud « **N1** » sera par défaut la valeur moyenne de ces nœuds.

Remarque : selon le logiciel utilisé, différents paramétrages sont possibles pour afficher par exemple plutôt la valeur maximale, la valeur minimale ou médiane.

Cette analyse a pour but de regarder pour un nœud, la valeur de celui-ci pour chaque élément adjacent composé de ce nœud. Si la différence en pourcentage de la valeur la plus éloignée par rapport à la moyenne est inférieure à « 5-10% » le modèle est jugé valide. Dans le cas contraire un affinage dans cette zone est nécessaire.

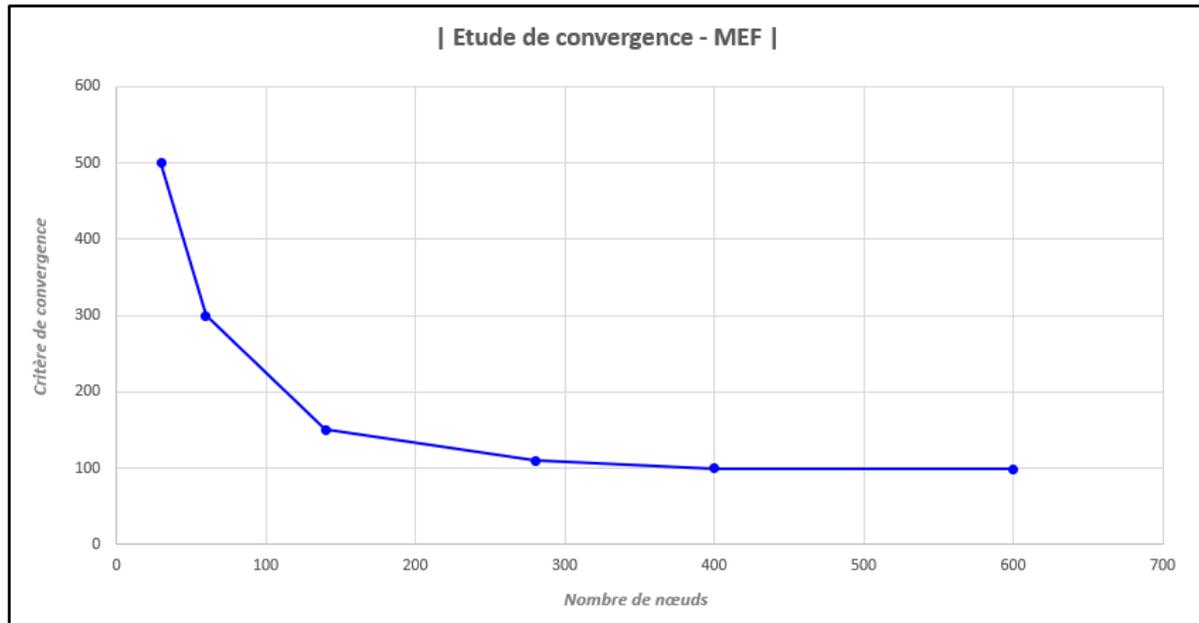
5.2.5 Etude de convergence du maillage

Lors de la réalisation d'un calcul par éléments finis, le résultat donné par l'analyse n'est pas forcément le résultat optimal calculable numériquement. En effet dans le cas de figure où le maillage n'est pas suffisamment fin pour atteindre la précision nécessaire pour représenter de manière cohérente les propriétés physiques du modèle, des valeurs erronées peuvent être calculées (hors singularité).

L'étude de convergence permet d'étudier la pertinence du maillage en examinant les résultats de l'analyse, afin de déterminer si le maillage est assez fin pour obtenir des résultats cohérents.

L'étude permet de rendre compte de l'influence du nombre de nœud par rapport à un critère de résultat de l'analyse choisie. De manière générale ce critère peut être une contrainte, un déplacement ou bien une fréquence d'un mode bien précis d'un système.

Illustration d'une étude de convergence :



Le principe d'une étude de ce type est de toujours choisir un critère à un endroit précis et un critère donné pour toute l'étude, le plus pertinent étant de réaliser l'étude à un endroit critique de l'analyse.

On réalise alors plusieurs itérations en modifiant la taille du maillage soit du modèle entier ou de la zone qu'on souhaite étudier. On trace la courbe correspondante afin d'évaluer la convergence du modèle.

Remarque 1 : un modèle dont il a été démontré sa convergence n'est en rien gage de sa validité, il est gage uniquement de la qualité du maillage tel qu'il a été réalisé.

Remarque 2 : le graphique d'illustration plus haut montrant un exemple d'étude de convergence, a une tendance décroissante, mais le cas d'une tendance croissante est tout à fait possible, cela dépend du type d'éléments étudié.

5.3 Exploitation des résultats

L'exploitation des résultats ne peut être réalisée qu'une fois que la pertinence des résultats a été examinée.

5.3.1 Rapport d'une étude par éléments finis

La plupart des logiciels proposent des rapports de calculs automatiques, globalement ces rapports sont plutôt bien réalisés et plutôt corrects pour les études simples. Néanmoins, des ajouts ou un rapport rédigé à la main sont parfois nécessaires.

Il est préconisé que les informations suivantes soient retranscrites dans le rapport :

- Nom du projet, date et rédacteur du rapport
- Plan ou schéma du projet
- Logiciel de calculs et sa version utilisée
- Matériaux utilisés avec le détail de leurs propriétés
- Type d'étude réalisée
- Hypothèses considérées dans l'analyse
- Schéma explicatif des chargements et des conditions limites
- Illustration du maillage, avec description du type d'éléments ainsi que le nombre de nœuds
- Critères de vérification du maillage utilisés
- Présentation des résultats avec ci-besoin des sondes pour identifier précisément la valeur à des nœuds critiques
- Conclusion